778. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル Markoff 過程ニ就イテ II

角谷　静夫（阪大）

次ニ power series $\sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ ヲ考ヘル.

コレラハ何レモ $|z|<1$ ニテ正則ナ函数ヲ表ハシ，シカモ $\{k_n\}$, $\{p_n\}$ ノ定義ヨリ $|z|<1$ ニ於テ

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{1-\sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n}$$

ヲ満足スル。ヨツテ若シ $\sum_{n=1}^{\infty} k_n = k' < 1$ デアレバ右辺ハ $z \to 1$（real axis ニ沿ツテ）ナルトキ $\longrightarrow \frac{1}{1-k'}$ デアルカラ $p_n \geqq 0$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナルコトヨリ

$$\lim_{z\to 1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{1-k'}<\infty$$

ヲ得ル。ヨッテコノ時ハ $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ ハ絶対收斂シ、シタガッテ勿論 $\lim_{n\to\infty}p_n=0$ デアル。次ニ $\sum_{n=1}^{\infty}k_n=1$ ナルトキハ $\sum_{n=1}^{\infty}nk_n=M$ ヲ考ヘル。$M<\infty$ カ又ハ $M=\infty$ デアル。何レニシテモ

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{1-\sum_{n=1}^{\infty}k_n z^n}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}k_n(1+z+\cdots\cdots+z^{n-1})}=\frac{1}{M}$$

トナルコトハ容易ニワカルカラ

$$\lim_{z\to 1}(1-z)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\right)=\frac{1}{M}$$

ヲ得ル。但シ $M=\infty$ ナルトキハ $\frac{1}{M}=0$ トオクモノトスル。然ルニ $\{p_n\}$ ハ有界（$0\leqq p_n\leqq 1$）デアルカラ、コレヨリ直チニ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n\right)=\frac{1}{M}$$

ヲ得ル。[(1)] 此ノ如クシテ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)$ ノ存在ガ証明出来タ。次ニ $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{M}$ トナルコトヲ $\frac{1}{M}=P>0$

---

(1) 例ヘバ Wiener: Fourier Integral. chap. III. 104—106頁

コレヨリ Tauberian theorem ニヨッテ $p_n\to\frac{1}{M}$ トナルコトガ証明出来レバヨイノデアルガ、コレハ旨ク行カナイ様デアル。

ナル場合、即チ $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n = M < \infty$ ナル場合ニ、$k_n > 0$ トナル如キ n ノ最大公約数ガ 1 デアルトイフ條件ノ下デ証明スル。証明ヲ二段ニ分ツ。

第一段　$\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha > 0$ ナルコトヲ Khintchine ノ additive number theory ノ結果ヲ使ハズニ証明スルコト。

証明：p_{m+e} 次ノ如ク表ハスコトガ出來ル。

$$
\begin{aligned}
(4)\quad p_{m+e} = {} & p_m(k_1 p_{e-1} + k_2 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{e-2} p_2 + k_{e-1} p_1 + k_e) \\
& + p_{m-1}(k_2 p_{e-1} + k_3 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{e-1} p_2 + k_e p_1 + k_{e+1}) \\
& + p_{m-2}(k_3 p_{e-1} + k_4 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_e p_2 + k_{e+1} p_1 + k_{e+2}) \\
& + \cdots\cdots\cdots \\
& + p_1(k_m p_{e-1} + k_{m+1} p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{m+e-3} p_2 + k_{m+e-2} p_1 + k_{m+e-1}) \\
& + (k_{m+1} p_{e-1} + k_{m+2} p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{m+e-2} p_2 + k_{m+e-1} p_1 + k_{m+e})
\end{aligned}
$$

コレハ recurrence formula (3) ヲ繰返ヘシテ用ヒルコトニヨツテモ得ラレルガ probability ノ考ヘニモドレバ直接得ラレル。即チ p_n ハ n 回目ニ元ヘ戻ル probability, k_n ハ n 回目ニハジメテ元ヘ戻ル probability ト考ヘレバヨイノデアル。更ニ

(5) $k_{e,j} = k_{j+1}\, p_{e-1} + k_{j+2}\, p_{e-2} + \cdots\cdots + k_{j+e-1} \cdot p_1$
$$+ k_{j+e} \qquad j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, m, \cdots\cdots$$

トオケバ $k_{e,0} = p_e$ ニテ $k_{e,j}$ $(j > 0)$ ハ $l, l+1, \cdots\cdots, l+j-1$ 回目ニハ元ヘ戻ラズニ $l+j$ 回目ニ元ヘ戻ル probability デアル。コノ $k_{e,j}$ ヲ使ヘバ

(4*) $p_{m+e} = p_m \cdot k_{e,0} + p_{m-1} \cdot k_{e,1} + \cdots + p_1 \cdot k_{e,m-1}$
$$+ k_{e,m}$$

トナリ、且ツ又、$k_{e,j}$ ノ定義ヨリ明カニ

$$k_{e,0} + k_{e,1} + \cdots\cdots + k_{e,m} + \cdots\cdots \leqq 1$$

又ハ

(6) $p_e + k_{e,1} + k_{e,2} + \cdots\cdots + k_{e,m} + \cdots\cdots \leqq 1$

次ニ (6) ガ l ニ関シテ一様ニ収斂スルコトト、(6) ニ於テ実際ニ等号ガ成立スルコトヲ示サウ。(6) ガ l ニ関シテ一様ニ収斂スルコトハ $k_{e,j}$ ノ定義 (5) 及ビ $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n < \infty$ トナルコトヨリ明カデアロウ。実際 l ニ無関係ニ

$$\sum_{m=M}^{\infty} k_{e,m} = \sum_{m=M}^{\infty} (k_{m+1} \cdot p_{e-1} + k_{m+2}\, p_{e-2} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + k_{m+e-1}\, p_1 + k_{m+e})$$
$$\leqq \sum_{m=M}^{\infty} (k_{m+1} + k_{m+2} + \cdots\cdots + k_{m+e-1} + k_{m+e})$$
$$\leqq k_{M+1} + 2\, k_{M+2} + 3\, k_{M+3} + \cdots\cdots$$
$$\leqq \sum_{m=M+1}^{\infty} m\, k_m$$

ヨツテ M ヲ十分大キクトレバ右辺、シタガッテ左辺ハ l ニ

無関係ニイクラデモ小サクナル．次ニ (6) ニ於テ等号ガ成立スルトハ

$$\begin{aligned}
&p_l + k_{l,1} + k_{l,2} + \cdots\cdots + k_{l,m} \\
&\qquad = (k_1 p_{l-1} + k_2 p_{l-2} + \cdots\cdots + k_{l-1} p_1 + k_l) \\
&\qquad + (k_2 p_{l-1} + k_3 p_{l-2} + \cdots\cdots + k_l p_1 + k_{l+1}) \\
&\qquad + \cdots\cdots \\
&\qquad + (k_m p_{l-1} + k_{m+1} p_{l-2} + \cdots\cdots + k_{m+l-2} p_1 + k_{m+l-1}) \\
&\qquad + (k_{m+1} p_{l-1} + k_{m+2} p_{l-2} + \cdots\cdots + k_{m+l-1} p_1 + k_{m+l}) \\
&= p_{l-1}(k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_{m+1}) + p_{l-2}(k_2 + k_3 + \cdots\cdots + k_{m+2}) + \cdots \\
&\qquad + p_1(k_{l-1} + k_l + \cdots\cdots + k_{m+l-1}) + (k_l + k_{l+1} + \cdots + k_{m+l}) \\
&= p_{l-1} + p_{l-2}(1 - k_1) + \cdots\cdots + p_1(1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{l-2}) \\
&\qquad + (1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{l-1}) \\
&\qquad + O(k_{m+2} + 2k_{m+3} + 3k_{m+4} + \cdots\cdots)
\end{aligned}$$

然ルニ

$$\begin{aligned}
&p_{l-1} + p_{l-2}(1 - k_1) + \cdots\cdots + p_1(1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{l-2}) \\
&\qquad\qquad + (1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{l-1}) \\
&= \{p_{l-1} - (p_{l-2}k_1 + p_{l-3}k_2 + \cdots\cdots + p_1 k_{l-2} + k_{l-1})\} \\
&\qquad + \{p_{l-2} - (p_{l-3}k_1 + p_{l-4}k_2 + \cdots\cdots + p_1 k_{l-3} + k_{l-2})\} \\
&\qquad + \cdots\cdots \\
&\qquad + \{p_2 - (p_1 k_1 + k_2)\} + \{p_1 - k_1\} + 1 = 1
\end{aligned}$$

デアルカラ，結局

$$p_l + k_{l,1} + k_{l,2} + \cdots\cdots + k_{l,m} = 1 + O\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} n k_n\right)$$

ヨツテ

(7) $p_e + k_{e,1} + k_{e,2} + \cdots\cdots + k_{e,m} + \cdots\cdots = 1$

ヲ得ル。コレヨリ (4*) ヲ使ヘバ $m \geqq M$ ニ對シテ

$$p_{m+e} \geqq p_m \cdot k_{e,0} + p_{m-1} \cdot k_{e,1} + \cdots\cdots + p_{m-M} \cdot k_{e,M}.$$
$$\geqq \{\min(p_m, p_{m-1}, \cdots\cdots, p_{m-M})\}(k_{e,0} + k_{e,1} + \cdots\cdots + k_{e,M})$$

ヨツテ先ヅ M ヲ十分大キクトツテ $k_{e,0} + k_{e,1} + \cdots\cdots + k_{e,M} \geqq \frac{1}{2}$ ガ任意ノ e ニ對シテ成立スルヤウニトリ。然ル後 m ヲ十分大キクトツテ $m - M > N$ ナル如クトレバ（但シ N ハ $n > N$ ナルトキニ常ニ $p_n > 0$ トナルヤウナ N トスル。コノ様ナ N ガ存在スルコトハ、$k_n > 0$ トナル如キ n ノ最大公約數ガ 1 ナルコトヨリ容易ニワカル）.

$$\min(p_m, p_{m-1}, \cdots\cdots, p_{m-M}) = \alpha_0 > 0$$

トナルカラ結局 $m \geqq M + N$ ナル任意ノ m ニ對シテ $p_m \geqq \frac{1}{2}\alpha_0 > 0$ ガ成立スル。即チ $\varliminf_{n\to\infty} p_n = \alpha \geqq \frac{1}{2}\alpha_0 > 0$ デアル。

<u>第二段</u>　$\varliminf_{n\to\infty} p_n = \alpha > 0$ ナルトキ $\lim_{n\to\infty} p_n$ ガ存在スルコトノ証明。

コレハ吉田氏ガ 173 号ニ於テ証明サレタノト全ク同ジヤウニスレバ出来ル。シカシ吉田氏ノ証明ニ少シ不十分ナ点ガアツタノデ、コンデソレヲオギナツテ証明スル。（吉田氏ノ証明ニ於テハ $p_e + \sum_{j=1}^{\infty} k_{e,j}$ ガ <u>e ニ関シテ</u>一様ニ収斂スルト云フコトヲ注意シテナカツタノデアル）$\varlimsup_{n\to\infty} p_n = \beta$

トオキ $\beta > \alpha$ トシテ矛盾ヲ出セバヨイ。先ヅ (4^*) ニヨリ

$$p_{m+l} = p_m p_l + p_{m-1} \cdot k_{l,1} + p_{m-2} \cdot k_{l,2} + \cdots\cdots + p_1 \cdot k_{l,m-1} + k_{l,m}$$

ヨッテ ε ガ任意ニ與ヘラレタトキ先ヅ M ヲ十分大キクトッテ l ニ無関係ニ

$$k_{l,M+1} + k_{l,M+2} + \cdots\cdots \leqq \varepsilon$$

トナル様ニスレバ $m \geqq M$ ニ對シテ

$$p_{m+l} \leqq p_m \cdot p_l + p_{m-1} \cdot k_{l,1} + p_{m-2} \cdot k_{l,2} + \cdots\cdots + p_{m-M} \cdot k_{l,M} + \varepsilon$$

次ニ $\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n = \beta$ ナルコトヨリ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ N ガ定マッテ $n \geqq N$ ナルトキ $p_n < \beta + \varepsilon$ トナル。

更ニ $\underline{\lim_{n\to\infty}} p_n = \alpha$ ナルコトニヨリ、m ヲ十分大キクトッテ $p_m < \alpha + \varepsilon$，$m - M \geqq N$ トナルヤウニスルコトガ出来ル。

ヨッテ此ノ如キ m ニ對シテ

$$\begin{aligned} p_{m+l} &\leqq (\alpha+\varepsilon) p_l + (\beta+\varepsilon) k_{l,1} + (\beta+\varepsilon) k_{l,2} + \cdots\cdots + (\beta+\varepsilon) k_{l,M} + \varepsilon \\ &= (\alpha+\varepsilon) p_l + (\beta+\varepsilon)(k_{l,1} + \cdots\cdots + k_{l,M}) + \varepsilon \\ &\leqq (\alpha+\varepsilon) p_l + (\beta+\varepsilon)(1 - p_l) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$p_{m+l} \leqq -(\beta - \alpha) p_l + \beta + 2\varepsilon$$

コレハ m ヲ上記ノ如ク定メルト任意ノ l ニ対シテ成立スル式デアル、ヨッテ l ヲ十分大キクトッテ $p_{m+l} > \beta - \varepsilon$，$p_l > \alpha - \varepsilon$ ナル如クトレバ（コレハ可能！）

$$\beta - \varepsilon \leqq -(\beta - \alpha)(\alpha - \varepsilon) + \beta + 2\varepsilon$$

トナル。$\varepsilon > 0$、任意デアッタカラ $0 < \alpha < \beta$ トスレバコレ

ハ矛盾デアル。ヨッテ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, p_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, p_n$ デナケレバナラナイ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(p_1+\cdots\cdots+p_n)=\frac{1}{M}$ デアッタカラ $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{M}$ デナケレバナラヌコトハ明カデアル。

（注意）前号ニ掲ゲテ於イタ大キナ Matrix ノ形ヲ見ルト、$\sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)}=1$ ナル場合ノ Matrix $\mathbb{K}$ ハ (l) ノ空間ノ norm ガ 1 ノ bounded linear transformation ヲ與ヘ、且ツ任意ノ $x\in(l)$ ニ対シテ $\{\mathbb{K}^{(n)}(x)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ (l) 内ニテ compact ナ集合ヲ作ッテヰルコトガワカル。ヨッテ $\frac{1}{n}\{\mathbb{K}(x)+\mathbb{K}^{(2)}(x)+\cdots\cdots+\mathbb{K}^{(n)}(x)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ モ、x ヲ一ツ定メレバ compact デアル。故ニ一般ノ Banach 空間ニ於ケル linear transformation ノ iteration ノ議論[1]ヨリ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbb{K}^{(m)}\right\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ linear operator ノ sequence トシテ strongly ニ収斂スル。ヨッテ勿論 $\frac{1}{n}(p_{11}^{(1)}+p_{11}^{(2)}+\cdots\cdots+p_{11}^{(n)})\to P_{11}$ ガ存在スル。

実際吉田氏ニヨッテ注意サレタ如ク各々ノ ergodic part ニ於テハ mean ergodic Theorem ガ成立シテヰルノデアル。コレハ (l_1) ニ於ケル positive element $x_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\cdots)$ ガ positive element $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots)$ ニ各座標ガ収斂シ（$x_i^{(n)}\to x_i$,

---

(1) 吉田氏：紙上談話会 164 号 120，角谷．紙上談話会 162 号 711 (680)

$i=1,2,\cdots\cdots$) 且ツ $\|x_n\| \to \|x\|$.

$$\left(\text{即チ } \sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}| \to \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\right) \text{ ナラバ } x_n \to x \text{ strongly}$$

トナルコトヨリ容易ニワカルノデアル。